数理解析研究所講究録
第 1672 巻 2010 年 31-38

ランダム時間変更と散乱長に関するカッツの予想

東北大学・理学研究科 竹田 雅好 (Masayoshi Takeda)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 はじめに

マルコフ過程のランダムな時間変更については, 変換論の一つとして非常に一般的に研究されてきた (e.g. [8]). 正値連続加法汎関数 A_t によって時間変更は定義される時間変更過程の状態空間は A_t の定める台であり, 時間変更過程の生存時間は A_t の全変動 A_∞ に他ならない. 考察するマルコフ過程が対称であれば, ディリクレ形式の変換論としても研究され, 時間変更過程の生成するディリクレ形式は完全に同定されている ([2], [5]). これらの事実を用いて, ファインマン-カッツ汎関数の可積分性 (gaugeability) や全滞在時間に関するカッツの公式について調べてきたが ([12], [11]), ここでは, 散乱長に関するカッツの公式についても同じアイデアで示し, 公式をスムーズな測度に対応する加法汎関数まで拡張する.

まずブラウン運動に対して, 時間変更の方法で得られた結果を復習しておこう. D を $\mathbf{R}^d$ 領域とし, 吸収壁ブラウン運動を

$$B_t^D = \begin{cases} B_t & \text{on } t < \tau_D \\ \Delta & \text{on } t \geq \tau_D \end{cases} \qquad (B_\infty^D = \Delta).$$

で定義する. ここで τ_D は, ブラウン運動が領域 D を最初に脱出する時刻を, Δ は**死点**と呼ばれる仮想点である. 吸収壁ブラウン運動は, 領域 D を脱出するまではブラウン運動のように振る舞い, 脱出以後は死点に留まることを上の定義は述べている. 汎関数 $\int_0^t V(B_t^D)dt$ の右連続な逆関数を τ_t と書く: $\tau_t = \inf\{s > 0 : \int_0^s V(B_u^D)du > t\}$. そのとき, 吸収壁ブラウン運動の時間変更過程 X_t を, B_t^D の時間変数 t のところにランダムな時間 τ_t を代入して, $X_t = B_{\tau_t}^D$ で定義する. すると X_t は, $F = \{x \in R^d : \mathbb{P}_x(\tau_0^V = 0) = 1\}$ を状態空間に持つ Vdx-対称なマルコフ過程になる ([5]). すなわち, F 上

の関数 f に対して半群 $\{p_t\}$ を $p_t f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_t))$ で定義すると, p_t は $L^2(F; V dx)$ 上の対称作用素となる. それに伴って, 時間変更過程 X_t の生成作用素は $L^2(F; V dx)$ 上の自己共役作用素となり, そのスペクトル下限 $\lambda(D, V)$ は

$$\lambda(D,V) = \inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u):\ u \in C_0^\infty(D),\ \int_D u^2(x)V(x)(dx) = 1\right\}$$

で与えられる. ここで $\mathbf{D}$ はディリクレ積分. ポテンシャル V にある条件 (**グリーン緊密性**) を仮定すると, $\lambda(D, V)$ は最小固有値となる. この事実は時間変更過程の生成するディリクレ形式が同定されていることから従う. ディリクレ形式としては吸収壁ブラウン運動のディリクレ形式が現れており, ただし正規化する測度が $V dx$ に変わっていることを注意しておく.

領域 D 上の関数を

$$g_D^V(x) = \mathbb{E}_x\left(\exp\left(\int_0^{\tau_D} V(B_t)dt\right)\right) \quad \textbf{(ゲージ関数)}$$

で定義したとき, Z.-Q. Chen [1], M. Takeda [12] で

$$\sup_{x\in D} g_D^V(x) < \infty \Longleftrightarrow \lambda(D,V) > 1$$

が示された. この事実は, $\int_0^{\tau_D} V(B_t)dt$ が時間変更過程 Y_t にとっての生存時間と考えられることから, 生存時間の指数可積分性を議論することで示される.

全空間 $\mathbf{R}^d$ $(d \geq 3)$ のコンパクト部分集合 K に対し, K への全滞在時間に関するカッツの定理,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\log \mathbb{P}_x^W\left(\int_0^\infty I_K(B_s)ds > t\right)\\ = -\inf\left\{\frac{1}{2}\mathbf{D}(u,u):\ \int_K u^2 dx = 1\right\}\end{aligned} \tag{1}$$

は, カッツにより固有関数展開を用いて証明された. これも上と同様に $\int_0^\infty I_K(B_s)ds$ をブラウン運動の加法汎関数 $\int_0^t I_K(B_s)ds$ に関する時間変更過程の生存時間だと考えることで示せる. 以下では, 散乱長と容量に関するカッツの予想も, 散乱長を時間変更過程の生存時間で表現することで導けることを示す ([13]).

カッツ [6], カッツ-ルッティンジャー [7] は, **散乱長** (scattering length) をブラウン運動を使って表現しその性質を調べた. 実際, V を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の非負可積分関数とし, $(\mathbb{P}_x^W, B_t)$ を $\mathbf{R}^3$ 上のブラウン運動とするとき, 散乱長 $\Gamma(V)$ の確率表現を

$$\Gamma(V) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbf{R}^3} \left(1 - \mathbb{E}_x^W \left(e^{-\int_0^t V(B_s)ds}\right)\right) dx \tag{2}$$

で与えた. さらに $\Gamma(V)$ は

$$\Gamma(V) = \int_{\mathbf{R}^3} \mathbb{E}_x^W \left(e^{-\int_0^\infty V(B_t)dt}\right) dx \tag{3}$$

と等しくなる (2 節参照). ここでは, 式 (3) を散乱長の定義としよう (散乱長の本来の定義と意味については [6] を参照). コンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}^3$ がカッツの意味での正則性 [9] をもつならば, $\Gamma(\alpha 1_K)$ は $\alpha \to \infty$ の極限で K の容量に収束することを示した. さらにカッツは [6] の中で, コンパクトな台をもつ任意の非負可積分関数 V に対しても, 極限

$$\gamma_V := \lim_{\alpha\to\infty} \Gamma(\alpha V)$$

は, V の台の容量にのみに依るだろうと予想した. 高橋 [10] では $\Gamma(V)$ の新たな表現を与えこの予想を証明し, M.E. Taylor [15], 田村 [14] ではポテンシャル V に滑らかさを仮定して解析的に証明を与えた. 我々はディリクレ形式におけるランダムな時間変更の理論を用いてカッツの予想に対する新たな証明を与える. すなわち,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \Gamma(\alpha V) = \mathrm{Cap}(F^V). \tag{4}$$

を示す. ここで F^V は, 停止時刻 τ を

$$\tau = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t V(B_s)ds > 0\right\}$$

で定めたとき,

$$F^V = \{x \in \mathbf{R}^3 : \mathbb{P}_x^W(\tau = 0) = 1\},$$

で定義される. また Cap はニュートン容量である.

2 散乱長に関するカッツの公式

$X = (\Omega, \mathbb{P}_x, \{\mathcal{F}_t\}, X_t, \theta_t, \zeta)$ を, 局所コンパクト距離空間 E を状態空間にもつ m-対称なマルコフ過程とする. ここで, m は E 上の正のラドン測度で, 位相的台が E 全体であるものとする. θ_t は任意の $s, t \geq 0$ に対して $X_s(\theta_t) = X_{s+t}$ を満たす**シフト作用素**で, ζ は X の**生存時間**とする. マルコフ過程 X の生成する $L^2(E; m)$ 上のディィリクレ形式を $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ と記す.

より一般の対称マルコフ過程に対して公式 (4) の証明を与えるのみならず, ポテンシャルも関数 V をスムース測度 μ に拡張しよう. $\{A_t^\mu\}_{t\geq 0}$ で μ にルウューズ対応する正の連続汎関数とする (Theorem 5.1.3 [5]). $d\mu(x) = V(x)dm(x)$ のときは, $A_t^\mu = \int_0^t V(X_s)ds$ である. A_t^μ の右連続な逆関数を

$$\tau_t(\omega) = \inf\{s > 0 : A_s^\mu(\omega) > t\}, \quad (\inf \emptyset := \infty)$$

で定義し, F^μ で $\{A_t^\mu\}_{t\geq 0}$ の細位相による台

$$F^\mu = \{x \in E : \mathbb{P}_x(\tau_0 = 0) = 0\}$$

とする. 測度 μ は有限, $\mu(E) < \infty$ を仮定する. カッツ [6] に従って, ここでは**散乱長**を

$$\Gamma(\mu) = \int_E \mathbb{E}_x\left(e^{-A_\zeta^\mu}\right)\mu(dx) \tag{5}$$

で定義する. なぜならば, X の保存性, $\mathbb{P}_x(\zeta = \infty) = 1$, を仮定すると, $\Gamma(\mu)$ は カッツの与えた確率論的表現 (2)

$$\Gamma(\mu) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_E \left(1 - \mathbb{E}_x\left(e^{-A_t^\mu}\right)\right) m(dx). \tag{6}$$

と等しくなるからである. 実際, $\{p_t^\mu\}_{t\geq 0}$ をファインマン-カッツ半群, すなわち, 有界なボレル関数 f に対して

$$p_t^\mu f(x) = \mathbb{E}_x\left(e^{-A_t^\mu} f(X_t)\right)$$

で定義される半群とする. また $\mathbb{P}_x^\mu$ で, 対称マルコフ過程 X にウエイト $e^{-A_t^\mu}$ を掛けて変換することによって構成される対称 m-対称なマルコフ過程とする:

$$\mathbb{P}_x^\mu(F; t < \zeta) = \mathbb{E}_x\left(e^{-A_t^\mu}; F\right), \quad F \in \mathcal{F}_t.$$

[8, (62.13)] より

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x^\mu(A_t^\mu) &= \mathbb{E}_x\left(\int_0^t A_s^\mu(-de^{-A_s^\mu}) + A_t^\mu e^{-A_t^\mu}\right) \\
&= \mathbb{E}_x\left(\int_0^t e^{-A_s^\mu} dA_s^\mu\right)
\end{aligned}
$$

となる．また [3, Theorem 2.2.2] によると，$\mathbb{P}_x^\mu$ に関する A_t^μ のルウューズ測度は μ のままであることが分かる．従って，ルウューズ対応の同値な主張のうち [5, Theorem 5.1.3 (iii)] を使うと

$$
\begin{aligned}
\left\langle m, 1-\mathbb{E}_x\left(e^{-A_t^\mu}\right)\right\rangle &= \left\langle m, \mathbb{E}_x\left(\int_0^t e^{-A_s^\mu} dA_s^\mu\right)\right\rangle \\
&= \langle m, \mathbb{E}_x^\mu\left(A_t^\mu\right)\rangle \\
&= \int_0^t \langle \mu, p_s^\mu 1\rangle ds
\end{aligned}
$$

が分かる．$p_t^\mu 1(x)$ は $t \to \infty$ のとき $\mathbb{E}_x(e^{-A_\infty^\mu})$ に収束するので，式 (5) を得る．

式 (5) より，次の補題を示せば公式 (4) が導ける．

補題 2.1.

$$
\alpha \int_E \mathbb{E}_x\left(e^{-\alpha A_\zeta^\mu}\right) \mu(dx) \uparrow \operatorname{Cap}(F^\mu), \quad \alpha \uparrow \infty. \tag{7}
$$

ここで容量 Cap は開集合 O に対しては

$$
\operatorname{Cap}(O) := \inf\{\mathcal{E}(u,u) : u \geq 1,\ m\text{-}a.e.\ on\ \ O\}
$$

で，任意の集合 A に対しては外容量として

$$
\operatorname{Cap}(A) := \inf\{\operatorname{Cap}(O) : O \supset A \text{ となる開集合}\}
$$

で定義する．

補題 2.1の証明において，ディリクレ形式におけるランダムな時間変更の理論を用いる ([2], [5] 参照)．

補題 2.1の証明 時間変更過程 Y_t を $Y_t = X_{\tau_t}$ で定義する．そのとき Y_t は，μ-対称なマルコフ過程で，F^μ を状態空間としてもち，さらに生存時間

は A^{μ}_{ζ} となる ([5, Theorem 6.2.1], [8, Theorem 65.9] 参照). $\check{\mathbb{P}}_x$ で時間変更過程 Y_t の法則を, $\check{\zeta}$ でその生存時間を記す. そのとき $x \in F^{\mu}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left(e^{-\alpha A^{\mu}_{\zeta}}\right) &= \check{\mathbb{E}}_x\left(e^{-\alpha\check{\zeta}}\right) = 1 - \alpha\,\check{\mathbb{E}}_x\left(\int_0^{\check{\zeta}} e^{-\alpha t}dt\right)\\ &= 1 - \alpha \check{R}_{\alpha}1(x)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\check{R}_{\alpha}$ は Y_t の α-レゾルベントであり, 1 は集合 F^{μ} の定義関数, $1 = 1_{F^{\mu}}(x)$ を表すものとする. よって (2.1) の右辺は $\alpha(1, 1-\alpha\check{R}_{\alpha}1)_{\mu}$ に等しい.

$(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}}))$ で時間変更過程 Y_t の生成する $L^2(F^{\mu};\mu)$ 上のディリクレ形式とする. 測度 μ に関する仮定より $1_{F^{\mu}}$ は $L^2(F^{\mu};\mu)$-関数であることに注意しよう. よって, もし $1_{F^{\mu}} \in \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}})$ ならば, $\check{\mathcal{E}}^{(\alpha)}(1,1) := \alpha(1, 1-\alpha\check{R}_{\alpha}1)_{\mu}$ は, $\alpha \uparrow \infty$ のとき単調増大に $\check{\mathcal{E}}(1,1)$ に収束する ([5, Lemma 1.3.4]). ディリクレ空間 $\mathcal{D}(\check{\mathcal{E}})$ は完全に特徴付けられており (Theorem 6.2.1 in [5]), またディリクレ形式 $\check{\mathcal{E}}$ は元のディリクレ形式 $\mathcal{E}$ で表現される ([5, Theorem 6.2.1]). 特に,

$$\check{\mathcal{E}}(1,1) = \mathcal{E}(H_{F^{\mu}}1, H_{F^{\mu}}1), \quad H_{F^{\mu}}1(x) = \mathbb{E}_x(1_{F^{\mu}}(X_{\sigma_{F^{\mu}}}); \sigma_{F^{\mu}} < \infty)$$

が成り立つ. ここで $\sigma_{F^{\mu}} = \inf\{t > 0 : X_t \in F^{\mu}\}$. 従って $\alpha \uparrow \infty$ のとき

$$\Gamma(\alpha\mu) = \alpha(1, 1-\alpha\check{R}_{\alpha}1)_{\mu} \uparrow \check{\mathcal{E}}(1,1) = \mathcal{E}(H_{F^{\mu}}1, H_{F^{\mu}}1) \tag{8}$$

が成り立つ. F^{μ} は概ボレル集合で細閉集合であるから (cf. [5, p. 192]), $\mathbb{P}_x(X_{\sigma_{F^{\mu}}} \in F^{\mu}) = 1$ かつ

$$H_{F^{\mu}}1(x) = \mathbb{P}_x(\sigma_{F^{\mu}} < \infty).$$

よって, (8) の右辺は $\mathrm{Cap}(F^{\mu})$ に等しくなる ([5, Theorem 4.3.3]).

もし $1_{F^{\mu}} \notin \mathcal{D}(\check{\mathcal{E}})$ ならば, $\alpha \uparrow \infty$ のとき $\lim_{\alpha\to\infty}\check{\mathcal{E}}^{(\alpha)}(1,1) \uparrow \infty$ であり $\mathrm{Cap}(F^{\mu}) = \infty$ となる. 以上で補題 2.1の証明が終わる.

最後に F^{μ} についてコメントしておく. F を μ の位相的台とすると, 集合 $F^{\mu} \setminus F$ は容量ゼロであるが, $F \setminus F^{\mu}$ は必ずしも容量ゼロとは限らない (cf. [5, §5.1]). ただし

$$\mathbb{P}_x(A^{\mu}_{\zeta} > 0) = \mathbb{P}_x(\sigma_{F^{\mu}} < \zeta) \tag{9}$$

は分かる. 実際, もし$\sigma_{F^\mu}<\zeta$であるならば$A^\mu_\zeta=A^\mu_\zeta(\theta_{\sigma_{F^\mu}})$, もし$\sigma_{F^\mu}=\infty$であるならば$A^\mu_\zeta=0$であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(A^\mu_\zeta>0) &= \mathbb{P}_x(A^\mu_\zeta>0,\sigma_{F^\mu}<\zeta)+\mathbb{P}_x(A^\mu_\zeta>0,\sigma_{F^\mu}=\infty)\\ &= \mathbb{P}_x(A^\mu_\zeta(\theta_{\sigma_{F^\mu}})>0,\sigma_{F^\mu}<\zeta)\\ &= \mathbb{E}_x(\mathbb{P}_{X_{\sigma_{F^\mu}}}(A^\mu_\zeta>0);\sigma_{F^\mu}<\zeta)\ (\text{強マルコフ性より})\end{aligned}$$

をなる. $\{\sigma_{F^\mu}<\zeta\}$ 上で $\mathbb{P}_{X_{\sigma_{F^\mu}}}(A^\mu_\zeta>0)=1$ となるので, 上の右辺は$\mathbb{P}_x(\sigma_{F^\mu}<\zeta)$ に等しい.

$\mathbf{R}^3$ 上のブラウン運動 $\mathbb{P}^W_x$ で $\mu(dx)=1_K(x)dx$ (K:コンパクト集合) のとき, K のカッツ正則性は $\mathrm{Cap}(K\setminus F^\mu)=0$ で定義されるので, $\mathbb{P}^W_x(\sigma_K=\sigma_{F^\mu})=1$ が従う. 結果として, カッツ正則性をもつコンパクト集合 K に対して, $\mathrm{Cap}(F^\mu)=\mathrm{Cap}(K)$ が導かれる. 確率論的に言うと, 「いつ K の浸透時刻と K への到達時刻が等しくなるか?」という問いと関連する.

3 終わりに

シュレディンガー作用素の最小固有値, 散乱長などのブラウン運動を用いた確率表現を, 固有関数展開の方法によりカッツは与えた. しかしポテンシャルが変われば固有値, 固有関数はいっせいに変わる. 時間変更過程の方法では時間変更過程は変わるが, 調べるべきものはその生存時間であることに変わりはない. スムース測度の台が E でない場合の時間変更過程は一般的に, 飛躍部分も消滅部分も現れその性質を調べることに難しさが生ずるが, 固有関数展開を用いない確率的な証明が可能になる

参考文献

[1] Chen, Z.-Q.: Gaugeability and Conditional Gaugeability, Trans. Amer. Math. Soc. **354**, 4639-4679, (2002).

[2] Chen, Z.-Q., Fukushima, M.: Symmetric Markov Processes, Time Change and Boundary Theory, Book manuscript (2009).

[3] Fitzsimmons, P.J., Getoor, R.K.: Revuz measures and time changes, Math. Zeit. **199**, 233-256 (1988).

[4] 福島正俊, 竹田雅好: マルコフ過程, (2008).

[5] Fukushima, M., Oshima, Y., Takeda, M.: Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes, Walter de Gruyter, Berlin, (1994).

[6] Kac, M.: Probabilistic methods in some problems of scattering theory, Rocky Mountain J. Math. **4** , 511-537 (1974).

[7] Kac, M., Luttinger, J.-M.: Scattering length and capacity, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **25**, 317-321 (1975).

[8] Sharpe, M.: General theory of Markov processes, Pure and Applied Mathematics, **133**, Academic Press (1988).

[9] Stroock, D.W.: The Kac approach to potential theory. I, J. Math. Mech. **16**, 829–852 (1967).

[10] Takahashi, Y.: An integral representation on the path space for scattering length, Osaka J. Math. **7**, 373-379 (1990).

[11] Takeda, M.: Exponential decay of lifetimes and a theorem of Kac on total occupation times, Potential Analysis **11**, 235-247 (1999).

[12] Takeda, M.: Conditional gaugeability and subcriticality of generalized Schrödinger operators, J. Funct. Anal. **191**, 343-376, (2002).

[13] Takeda, M.: A Formula on scattering length of positive smooth measures, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[14] Tamura, H.: Semi-classical limit of scattering length, Lett. Math. Phys. **24**, 205-209 (1992).

[15] Taylor, M.E.: Scattering length and perturbations of $-\Delta$ by positive potentials, J. Math. Anal. Appl. **53**, 291-312 (1976).